

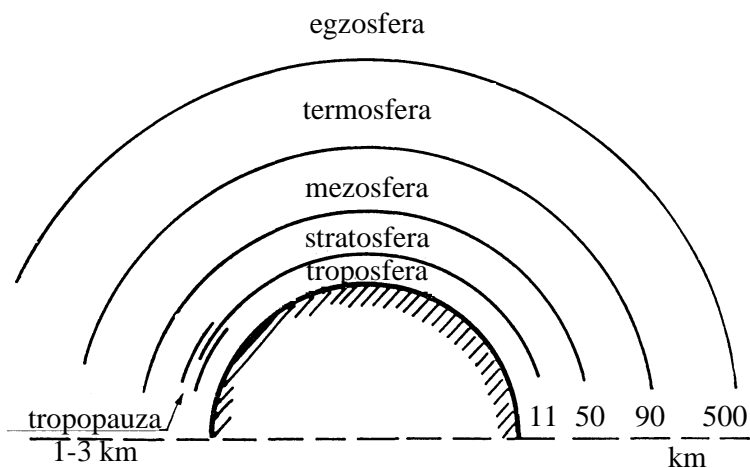
1. KARAKTERISTIKE OKOLINE I KOORDINATNI SISTEMI

1.1. ZEMLJINA ATMOSFERA

Vazdušni omotač koji okružuje Zemlju naziva se atmosfera. Od Zemljine površine do 5 km visine nalazi se 50% celokupne mase vazduha, 90% do 20 km visine, a oko 99% do 30 do 35 km visine. Gornju granicu do koje se prostire atmosfera određuje prelazni sloj iz koga se izbačeni molekuli vazduha više ne vraćaju u atmosferu. Celokupna masa Zemljine atmosfere čini nešto manje od jednog milionitog dela Zemljine mase.

1.1.1. PODELA ATMOSFERE NA TEMPERATURSKE ZONE

Osnovni fizički parametri atmosfere – gustina, temperatura, pritisak, brzina zvuka i vetar, svojim vrednostima utiču na karakteristike kretanja tela (aerodinamička sila). Ukoliko se temperatura vazduha posmatra kao osnovni parametar, što je od velikog interesa za proračune dinamike leta, atmosferu možemo podeliti na pet osnovnih slojeva prema karakteru raspodele temperature sa visinom: troposfera, stratosfera, mezosfera, termosfera i egzosfera (sl.2.1).



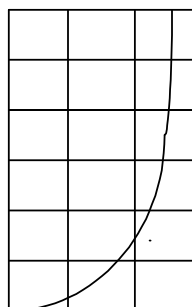
Sl. 1.1 Podela atmosfere na slojeve

Troposfera sadrži 75 % ukupne mase atmosfere i prostire se do 11 km visine. Visina ovog sloja opada ka polovima a raste u ekvatorijalnim oblastima (do 16 km). Visina troposfere zavisi od godišnjeg doba i povećava se ljeti a smanjuje zimi. Temperatura vazduha u proseku opada **6,5 °C** na svakih hiljadu metara. Troposfera sadrži glavni deo vodene pare i zbog toga se u njoj stvaraju oblaci koji daju padavine. Značajno mesto zauzimaju horizontalna i vertikalna kretanja vazdušnih masa – vetrovi. Vertikalni profil srednjeg vetra na malim visinama dat je na sliciPromena matematičkog očekivanja konstantnog srednjeg vetra sa visinom može se približno opisati stepenim zakonom:

$$\frac{W_0}{W_{01}} = \left(\frac{H}{H_1} \right)^n \quad (1.1)$$

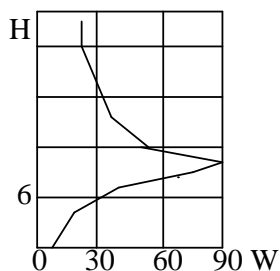
gde je indeksom "1" označena etalon

Vrednost stepena n zavisi od meteoroških uslova i kreće se u granicama od 0.15 do 0.2.



H

Tropopauza je prelazni sloj atmosfere između troposfere i stratosfere. Obično ima debljinu od 1 do 3 km. U njoj prestaje opadanje temperature sa visinom, dok su dnevne promene temperature najveće. Značajna je zbog pojave tropskih vetrova koji mogu da dostignu brzinu do 110 m/s (sl.). Tropski vetar nastaje kretanjem toplog vazduha od ekvatora ka polovima, a njegov intenzitet zavisi od razlike temperatura. Usled obrtanja Zemlje javlja se Coriolis-Koriolisova sila koja menja pravac vetra i na severnoj hemisferi skreće ga od jugozapada ka severoistoku, a na južnoj od severozapada ka jugoistoku.



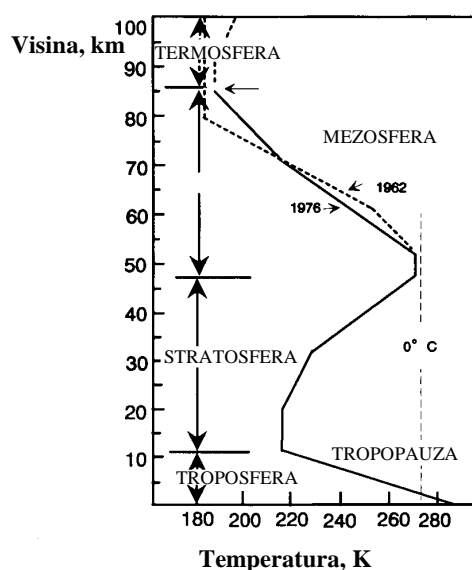
Sledeći sloj – stratosfera, prostire se od 11000 do 50000 m iznad Zemljine površine. Do visine od 35000 m temperatura je konstantna i njena srednja vrednost iznosi **-56.5 C**. Sa daljim porastom visine temperatura raste i približava se vrednosti od **0 C**. Ovo povećanje temperature posledica je povećane količine ozona koja apsorbuje toplotnu energiju ultravioletnog zračenja i zagreva se. Stratosfera je sloj u kome još mogu da rade motori koji koriste vazduh za sagorevanje goriva (turbomlazni i nabojno-mlazni motori).

Sloj atmosfere od 50000 do 90000 m naziva se mezosfera. U donjim slojevima temperatura dostiže **0 C**, a zatim ponovo opada. Nagli pad temperature, koji je posledica smanjene količine ozona, uzrok je pojave jakih vertikalnih strujanja.

Termosfera se prostire od 90 000 do 500 000 m. U ovoj zoni se dolazi do snažne jonizacije vazduha pod uticajem ultravioletnog zračenja Sunca, tako da se temperatura ponovo povećava i dostiže vrednosti i do **773 C**. Međutim, ovo nije termodinamika temperatura, jer vazduh više ne možemo posmatrati kao fluid već kao skup čestica (molekula) na koji se ne može primeniti kinetička teorija gasova (slobodno-molekularno kretanje).

Sloj iznad termosfere naziva se egzosfera. Atmosfera je znatno razređena tako da je gustina reda veličine molekula. Čestice gasova kreću se brzinama koje mogu biti i veće od brzine odvajanja od polja gravitacije Zemlje, koja iznosi 7.9 km/s. Zbog toga takve čestice savlađuju silu Zemljine teže i odlaze u međuplanetarni prostor.

Promena temperature sa visinom data je na sl.2.2.

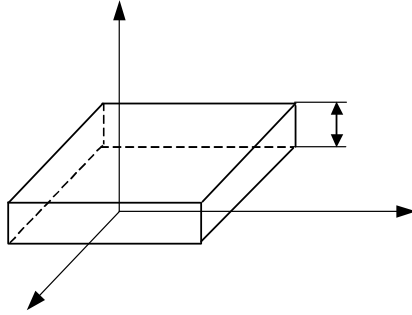


Sl 1.2. Promena temperature sa visinom

Važne karakteristike atmosfere su pritisak i gustina, koje su povezane sa temperaturom, tj. sa porastom visine monotonno opadaju. Promene u horizontalnom pravcu u posmatranom trenutku vremena su neznatne. Zakon promene pritiska sa visinom izveden je pod pretpostavkom da ne postoje strujanja vazduha. Sloj vazduha visine **dH** nalazi se u stanju ravnoteže, tako da je razlika pritisaka koji deluju na gornju i donju površinu sloja **S** jednaka težini sloja vazduha:

$$S(p + dp) - Sp = -SdH \rho g \quad (1.2)$$

$$dp = -\rho g dH \quad (1.3)$$



Koristeći jednačinu stanja

$$p = \rho RT \quad (1-4)$$

dobija se:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dH \quad (1-5)$$

Sa porastom nadmorske visine gustina vazduha opada, otpor kretanju projektila se smanjuje, što uslovljava povećanje dometa projektila. Ovaj podenostavljeni model atmosfere se koristi za proračun *standardne atmosfere* (prilog P-6)

1.1.2. SASTAV ATMOSFERE

Atmosfera je smeša nekoliko osnovnih gasova, hemijskih jedinjenja i raznih gasovitih, tečnih i čvrstih primesa. U prizemnim slojevima ima približno sledeći sastav:

Azot	N ₂	78.03 %
Kiseonik	O ₂	21.99 %
Argon	Ar	0.94 %
Ugljendioksid	CO ₂	0.03 %
Vodonik	H ₂	0.01 %

kao i male količine drugih gasova i vodene pare. Zbog toga što je atmosfera mešavina gasova različitih osobina, komponente ove mešavine se raspoređuju po visini u različitim odnosima shodno njihovoj gustini. S porastom visine količina kiseonika i azota opada, najpre lagano pa sve brže i brže, ustupajući mesto lakšim komponentama. Vodena para, najvažnija primesa vazduha, omogućava stvaranje oblaka i padavina, slabi Sunčevo zračenje i čuva toplotu koju Zemlja zrači.

1.2. ZEMLJA I NJENO GRAVITACIONO POLJE

1.2.1. KRETANJE ZEMLJE

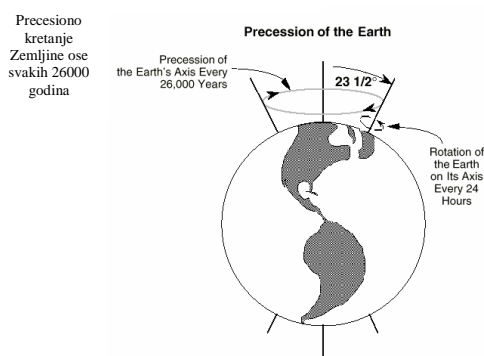
Zemlja izvodi složeno kretanje koje se sastoji od sledećih kretanja:

- obrtanje oko sopstvene ose sa zapada na istok, sa periodom od 23 h 56 min 4,091 s što je jednako 86164,091 s srednjeg sunčevog vremena. Dužina dana od 24 h predstavlja relativnu ugaonu brzinu zemlje u odnosu na sunce koja obuhvata ne samo rotaciju oko sopstvene ose već i rotaciju na putanji oko sunca Ugaona brzina rotacije zemlje jednaka je:

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164,091} = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

- Vektor ugaone brzine Zemlje ima pravac ose rotacije a usmeren je od južnog ka severnom polu.
- godišnje obrtanje oko Sunca sa srednjom brzinom kretanja po orbiti od 100 000 km/h ima period 365 dana, 6 časova i 9 minuta.
- nutaciono kretanje zemljine ose sa periodom oko 18,6 godina i amplitudom koja ne prelazi 9,2''
- precesiono kretanje zemljine ose je posledica uticaja gravitacije Meseca, koja teži da pomeri zemljinu osu normalno na ravan njegove orbite. Zemljina osa opisuje krug od 23,5° sa periodom oko 26000 godina.
- kretanje zajedno sa sunčevim sistemom u odnosu na druge zvezde.

Pri određivanju leta projektila sva ova složena kretanja Zemlje (osim prvog – rotacije oko sopstvene ose) imaju zanemarljiv uticaj. Uticaji povezani sa rotacijom Zemlje igraju veoma veliku ulogu u dinamici balističkih raketa srednjeg i velikog dometa..

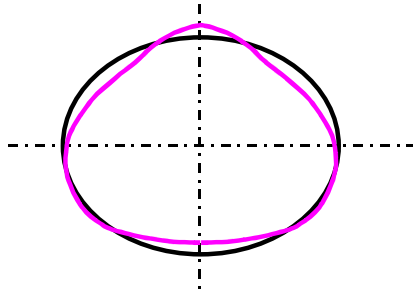


1.2.2. OBLIK ZEMLJE

Zemlja nije savršena lopta već je znatno bliža elipsoidu (osa koincidentna sa osom rotacije je nešto kraća od ekvatorijalne ose). Metodama preciznog merenja poremećaja putanja veštačkih satelita ustanovljena je veća spljoštenost južne Zemljine

DINAMIKA LETA PROJEKTILA

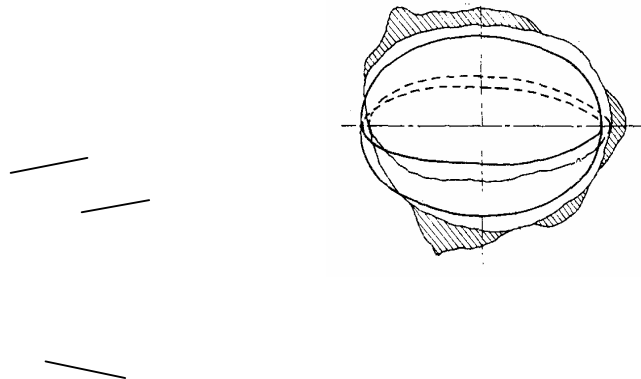
polulopte u odnosu na severnu. Ovo ukazuje da je Zemljin opšti oblik sličan krušci i naziva se *apioid*.



sl. 1.4. Oblik Zemlje - apioid

Najjednostavnija aproksimacija oblika zemlje je ipak lopta prečnika **6371005 m** (međunarodni standard WGS-84). Ova aproksimacija daje sasvim zadovoljavajuće rezultate za domete do 1000 km. Međutim, za veće domete je neophodna preciznija aproksimacija.

Površina Zemlje sa svim svojim neravninama naziva se fizička površina Zemlje. Fizičku površinu Zemlje je praktično nemoguće opisati matematički. Zbog toga je potrebno odrediti telo koje bi po obliku i razmeri bilo najbliže Zemlji, a čija bi se površina mogla matematički opisati.

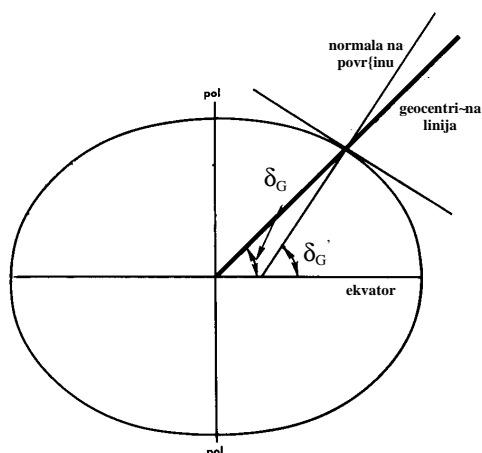


Sl 2.5. Fizička površina Zemlje, geoid elipsoid

Sl 2.6. Fizička površina Zemlje i obrtni

Od svih geometrijskih tela geoid predstavlja najbliži opis realne Zemljine površine. Ako bi Zemlja predstavljala fluidno telo, sa istom raspodelom mase, pod dejstvom Zemljine rotacije njena slobodna površina bi predstavljala geoid. Geoid predstavlja ekvipotencijalnu površinu Zemljinog gravitacionog polja, koja se poklapa sa neporemećenim srednjim nivoom mora. Ova površina se prostire ispod kontinenata. Pravac lokalnog "efektivnog" gravitacionog polja je svuda duž normale na površinu geoida. Veličina geoida je određena srednjim nivoom mora; a oblik je odredben vektorom lokalnog efektivnog gravitacionog ubrzanja ili efektivne gravitacione sile (sile teže) koja je normalna na površinu geoida u svakoj tački. Ovo je necentrično

gravitacionog polje koje se koristi za analizu interkontinentalnih letova i putanja satelita.

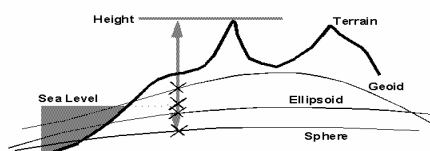


Sl 2.7. Eliptični poprečni presek Zemlje

Referentni elipsoid je najjednostavnija matematička figura koja je najbliža geoidu. Ova figura se dobija rotacijom elipse (**$a=6378137$ m, $b=6356752.3$ m**) oko male ose, koja odgovara Zemljinoj osi obrtanja. Rezultat je sferoid ili obrtni elipsoid.

Iz poremećaja putanja Zemljinih veštačkih satelita zaključeno je da opšti oblik Zemlje nije obrtni, već troosni elipsoid, odnosno da je i Zemljin ekvator elipsa. Velika osa ekvatorske elipse duža je za oko 400 m od male ose.

Za relativno najjednostavniji matematički opis Zemljine površine, neophodan za navigaciju, smatraće se sfera.

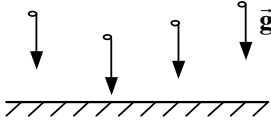


ZEMLJINO GRAVITACIONO POLJE

Spoljna balistika razmatra kretanje tela u centralnom gravitacionom polju Zemlje. Za domete manje od 100 km, Zemlju možemo smatrati ravnom površinom sa homogenim gravitacionim poljem. Ovaj model nije puno u upotrebi.

Homogeno paralelno gravitaciono polje

Ubrzanje sile privlačenja ne zavisi od visine i usmereno je po normali na površinu Zemlje ($g=\text{const}$).



sl. 2.8 Homogeno gravitaciono polje

Centralno gravitaciono polje

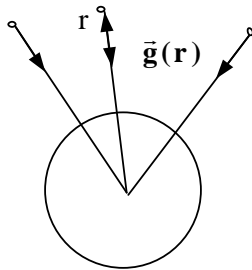
Ubrzanje sile privlačenja obrnuto je proporcionalno kvadratu rastojanja do centra Zemlje i usmereno je po radijusu ka centru Zemlje. Vektor ubrzanja sile privlačenja u centralnom polju dat je jednačinom:

$$\vec{g} = -\frac{\Gamma \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-4)$$

gde je:

- Γ - gravitaciona konstanta
- M - masa Zemlje
- r - rastojanje između centra Zemlje i centra mase projektila

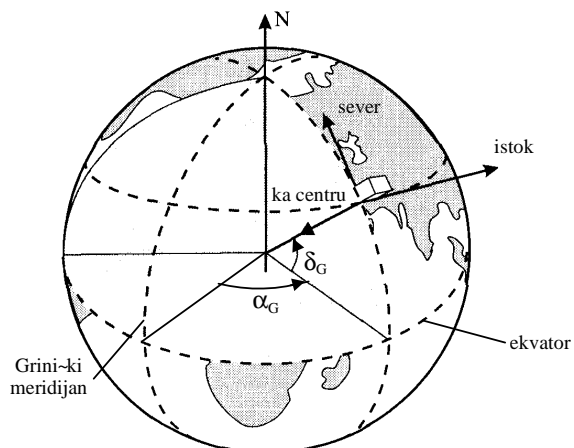
$$\Gamma M = 3,986004418 \cdot 10^{14} m^3 / s^2$$



Sl. 2.9 Centralno gravitaciono polje

1.2.3. ZEMALJSKE KOORDINATE

Ekvator je zamišljeni krug na površini sfere čiji se centar poklapa sa centrom sfere. Veliki krugovi koji prolaze kroz severni i južni pol se nazivaju meridijani, ili linije geografskih dužina. Na bilo kojoj tački na Zemljinoj površini može se definisati meridijan. Osnovni meridijan, od koga se mere istočni i zapadni meridijani, predstavlja meridijan koji označava položaj Kraljevske opservatorije u Griniču, Engleska. Geografska dužina (α_G) se izražava u stepenima, minutima i sekundama po luku od 0 do 180 stepeni istočno ili zapadno od osnovnog meridijana. Početna tačka od koje se mere severne i južne koordinate na Zemljinoj površini je ekvator. Krugovi u paralelnim ravnima koji se mere severno i južno u odnosu na ekvator nazivaju se paralele ili linije geografske širine. Geografska širina (δ_G) se takodje izražava u stepenima, minutima i sekundama po luku u odnosu na centar Zemlje.

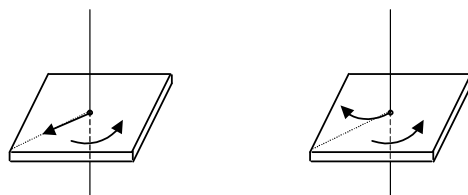


Sl.2.10. Zemaljske koordinate

Sisteme referencije možemo podeliti na inercijalne i neinercijalne. Neinercijalni sistemi imaju ubrzanje u odnosu na zvezde nekretnice i u odnosu na Sunce. Svaki sistem koji rotira nije inercijalni sistem (jer na njega deluje ubrzanje normalno na pravac vektora brzine). Ukoliko postoji relativno kretanje inercijalnog sistema ono je bez ubrzanja, odnosno ravnomerno pravolinijsko. U inercijalnim sistemima važi Newton-ov zakon inercije.

Zbog kratkog vremena leta projektila, može se uzeti u obzir samo Zemljino obrtno kretanje oko sopstvene ose. Koordinatni sistem koji je vezan za centar Zemlje i ne rotira zajedno sa Zemljom možemo smatrati inercijalnim. Koordinatni sistem koji je vezan za bilo koju tačku na površini Zemlje je neinercijalni jer rotira zajedno sa Zemljom. Međutim, za određene slučajeve (relativno kratki dometi i relativno male brzine leta), koordinatni sistem koji rotira zajedno sa zemljom može se uslovno smatrati inercijalnim.

Za posmatrača koji se nalazi u neinercijalnom koordinatnom sistemu kretanje tela biće sasvim drugačije nego za posmatrača u inercijalnom koordinatnom sistemu. Razmotrimo primer ploče koja se obrće oko vertikalne ose koja prolazi kroz sredinu ploče (slika....).



Sl. 2.11

Neka se nekoj kugli koja se nalazi na osi rotacije, saopšti samo početna brzina u radijalnom pravcu. Za posmatrača izvan ploče (u inercijalnom koordinatnom sistemu) kugla će se kretati pravolinijski konstantnom brzinom, bez ikakvog ubrzanja (trenje se zanemaruje). Kretanje kugle za posmatrača na ploči (u neinercijalnom koordinatnom sistemu) biće krivolinijsko, odnosno sa ubrzanjem. Kugla će skretati sa pravca u kome je dobila početnu brzinu i to skretanje će biti suprotno od smera rotacije ploče. Posmatrač u neinercijalnom koordinatnom sistemu može zaključiti da na kuglu deluje sila upravna na pravac početne brzine i vrši skretanje sa tog pravca po kome bi se kugla kretala po inerciji. Ova sila se zove Coriolisova sila i može se izračunati pomoću izraza:

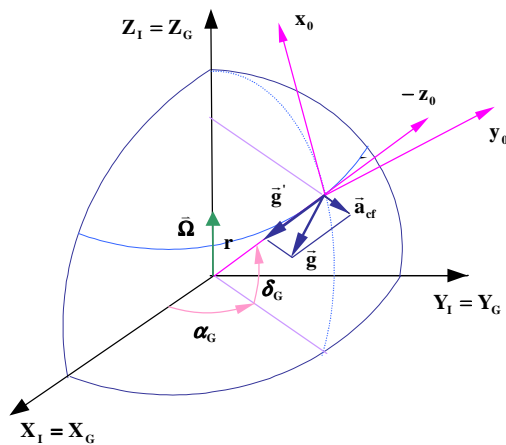
$$\vec{F}_C = -2m (\vec{\omega} \times \vec{V}) \quad (1-5)$$

Coriolisova sila je matematička, fiktivna veličina (koja u osnovi predstavlja inercijalnu silu), koja se mora uzeti u obzir pri posmatranju kretanja tela u neinercijalnim sistemima.

Posmatrač u neinercijalnom koordinatnom sistemu mora uzeti u obzir i rotaciju Zemlje preko centrifugalnog ubrzanja (koje je takodje fiktivna veličina koja u osnovi predstavlja silu inercije):

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cf} &= (\vec{r} \times \vec{\Omega}) \times \vec{\Omega} \\ |\vec{a}_{cf}| &= r \cdot \Omega^2 \cos \delta_G \end{aligned} \quad (1-6)$$

gde je δ_G geografska širina.



Sl. 2.12

Sila teže ili efektivna gravitaciona sila predstavlja vektorski zbir sile privlačenja (gravitacione sile) i prenosne inercijalne sile (centrifugalne sile):

$$\vec{G} = \vec{G}' + \vec{F}_{pn}^{in} \quad (1-7)$$

gde je prenosna inercijalna sila (centrifugalna sila) data jednačinom:

$$\vec{F}_{pn}^{in} = m \cdot \vec{a}_{cf} \quad (1-8)$$

1.3. KOORDINATNI SISTEMI

Svi koordinatni sistemi u daljem tekstu su izvedeni na bazi predloženog ANSI Standarda koordinatnih sistema za atmosferski let (Prilog 1) , obzirom da neki drugi standard (međunarodni ili jugoslovenski) i ne postoji. U podnaslovima su dati puni nazivi koordinatnih sistema, dok su skraćeni nazivi (koji će biti korišćeni u daljem tekstu) dati kurzivom.

1.3.1. Geocentrični inercijalni sistem

Inercijalni koordinatni sistem, fiksiran u prostoru:

O - u centru Zemlje

X_I - u početnom trenutku (trenutak starta) prolazi kroz presek ekvatora i Greenwich-kog meridijana ili meridijana lansirne tačke u pravcu neba

Y_I - kompletira desni trijedar

Z_I - koincidentna sa zemljinom glavnom (obrotnom) osom u pravcu severa

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Inercijalni koordinatni sistem***.

1.3.2. Geocentrični sistem vezan za Zemlju

Koordinatni sistem vezan za Zemlju (rotira zajedno sa Zemljom):

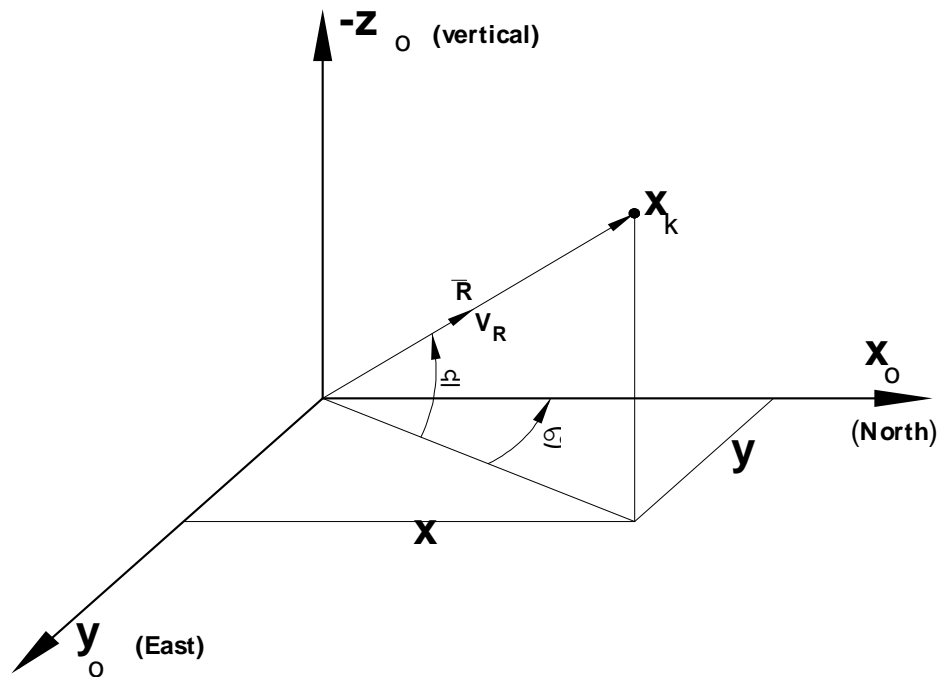
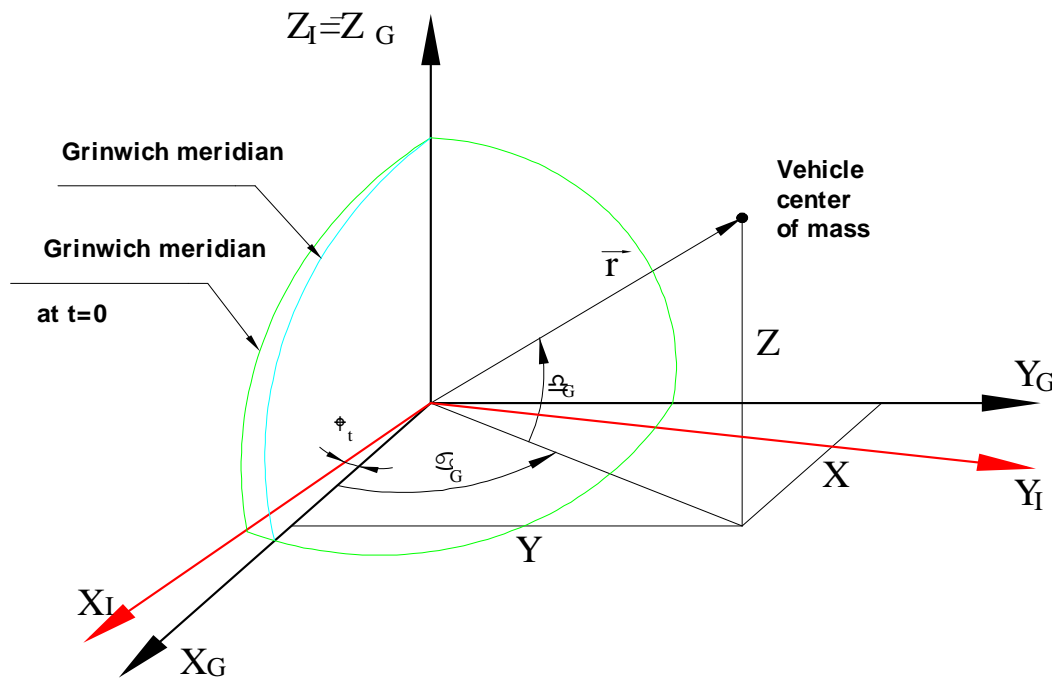
O - u centru Zemlje

X_G - prolazi kroz presek ekvatora i Greenwich-kog meridijana ili meridijana lansirne tačke u pravcu neba

Y_G - kompletira desni trijedar

Z_G - koincidentna sa zemljinom glavnom (obrotnom) osom u pravcu severa

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Geocentrični koordinatni sistem***.



Sl.2.13. Geocentrični sistem vezan za Zemljo

1.3.3. Normalni sistem vezan za Zemlju

Normalni sistem vezan za Zemlju:

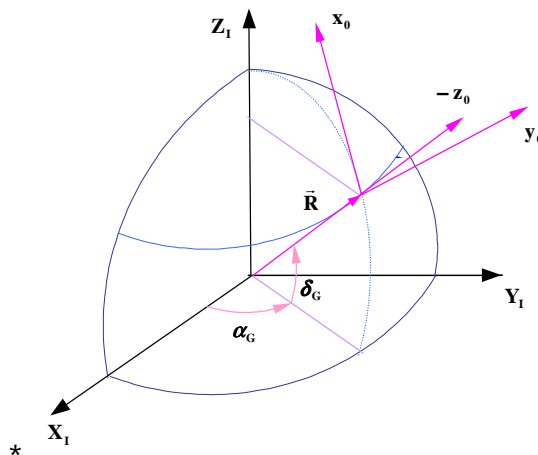
O - u projekciji centra masa projektila na zemljinu površinu

x_0 - horizontalna, u pravcu severa,

y_0 - horizontalna, u pravcu istoka

z_0 - vertikalna, u pravcu centra Zemlje

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno **Normalni koordinatni sistem**.



Sl.2.14 Normalni sistem vezan za Zemlju

1.3.4. Azimutalni sistem vezan za Zemlju

Azimutalni sistem vezan za zemlju predstavlja Normalni koordinatni sistem zaokrenut za ugao lansirnog azimuta oko z_0 -ose

O - u projekciji centra masa projektila na zemljinu površinu

x_A - horizontalna, u pravcu zaokrenutom za ugao **AZ** u odnosu na sever,

y_A - horizontalna, u pravcu zaokrenutom za **AZ** u odnosu na istok,

z_A - vertikalna, u pravcu centra Zemlje (koincidentna sa z_0)

U daljem tekstu ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno *Azimutalni koordinatni sistem*.

1.3.5. Sistem vezan za projektil

Sistem vezan za projektil:

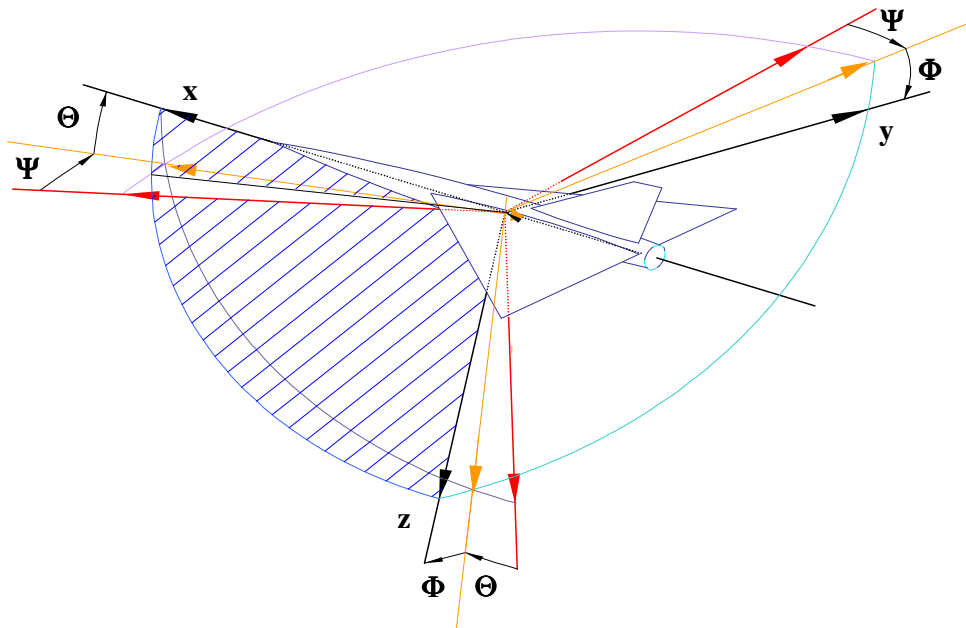
O - u centru masa projektila

x - koincidentna sa glavnom (uzdužnom) osom projektila (glavnom inercionom osom)

y - koincidentna sa poprečnom osom projektila (pozitivan smer - desno)

z - koincidentna sa normalnom osom projektila (smer takav da formira desni trijedar)

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno *Vezani koordinatni sistem*.



SL.2.15 Normalni sistem vezan za projektil

1.3.6. Sistem vezan za aerodinamičku brzinu projektila

Sistem vezan za aerodinamičku brzinu projektila

O - u centru masa projektila

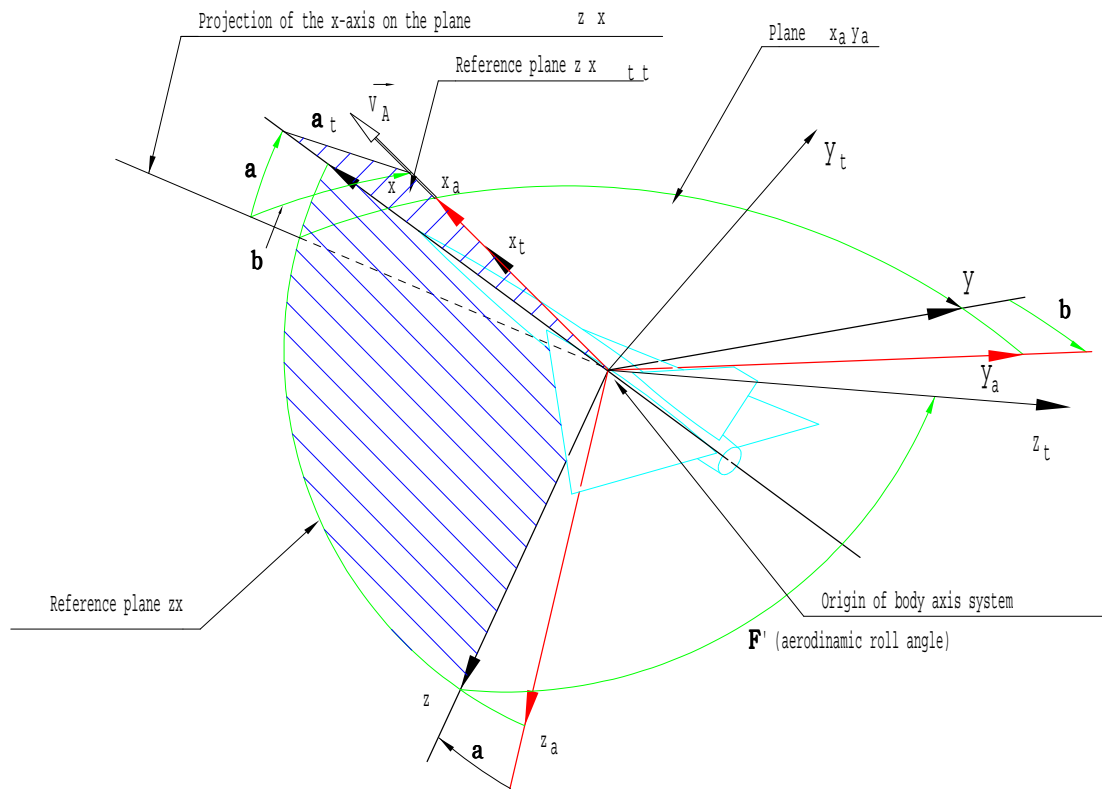
DINAMIKA LETA PROJEKTILA

x_a - koincidentan sa vektorom aerodinamičke brzine projektila

y_a - normalan na aerodinamičku brzinu, u normalnoj ravni projektila (pravac "nagore")

z_a - normalan na aerodinamičku brzinu, u poprečnoj ravni projektila (pravac takav da gradi desni trijedrar)

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno **Brzinski koordinatni sistem**.



Sl.2.16 Brzinski i koordinatni sistem projektila

1.3.7. Sistem vezan za žiroskopsku platformu

Inercijalni sistem, u početnom trenutku (trenutak lansiranja) identičan sistemu vezanom za projektil

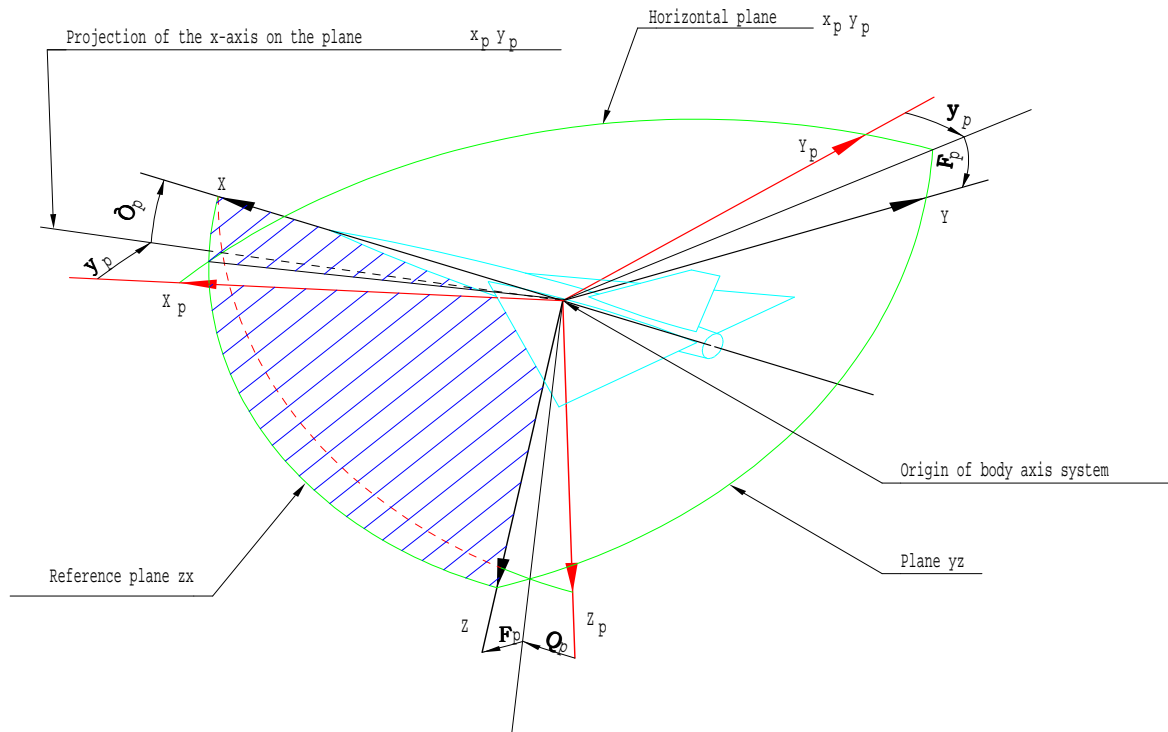
O - u centru masa projektila

x_p - koincidentan sa x osom u trenutku lansiranja

y_p - koincidentan sa y osom u trenutku lansiranja

z_p - koincidentan sa z osom u trenutku lansiranja

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno **Žiroskopski koordinatni sistem**.



SL.2.17. Žiroskopski i koordinatni sistem projektila

1.4. MATRICE TRANSFORMACIJE

U sledećim sekcijama će biti definisane i određene sve matrice transformacije iz jednog sistema u drugi.

1.4.1. Inercijalni u Geocentrični vezan za Zemlju

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Geocentrični koordinatni sistem, je definisana vrednošću ugla rotacije Zemlje (u odnosu na položaj u trenutku lansiranja):

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = T_I^G \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

$$T_I^G = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = T_G^I \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

$$T_G^I = (T_I^G)^T$$

1.4.2. Geocentrični u Normalni

Matrica transformacije iz Geocentričnog u Normalni je definisana vrednošću uglovnih geografskih koordinata (geografske širine i dužine):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = T_G^0 \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

$$T_G^0 = \begin{bmatrix} -\sin \delta_G \cos \alpha_G & -\sin \delta_G \sin \alpha_G & \cos \delta_G \\ -\sin \alpha_G & \cos \alpha_G & 0 \\ -\cos \delta_G \cos \alpha_G & -\cos \delta_G \sin \alpha_G & -\sin \delta_G \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = T_0^G \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

$$T_0^G = (T_G^0)^T$$

1.4.3. Normalni u Azimutalni

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = T_0^A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

$$T_0^A = (T_A^0)^T \quad (1-16)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = T_A^0 \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

1.4.4. Inercijalni u Normalni

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Normalni sistem je definisana vrednostima prethodne dve matrice transformacije:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_I^0 \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

$$\mathbf{T}_I^0 = \mathbf{T}_G^0 \mathbf{T}_I^G$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0^I \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

$$\mathbf{T}_0^I = (\mathbf{T}_I^0)^T$$

1.4.5. Inercijalni u Vezani

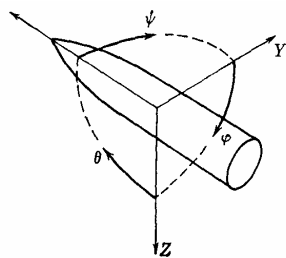
Matrica transformacije iz Inercijalnog u Vezani koordinatni sistem definisana je vrednostima Euler-ovih uglova:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_I^m \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

$$T_I^m = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Psi \cos \Theta & -\sin \Theta \\ -\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi & -\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

Pozitivan smer rotacije koordinatnog sistema za vrednosti Euler-ovih uglova dat je na slici...prema tablici 2.4.

DINAMIKA LETA PROJEKTILA

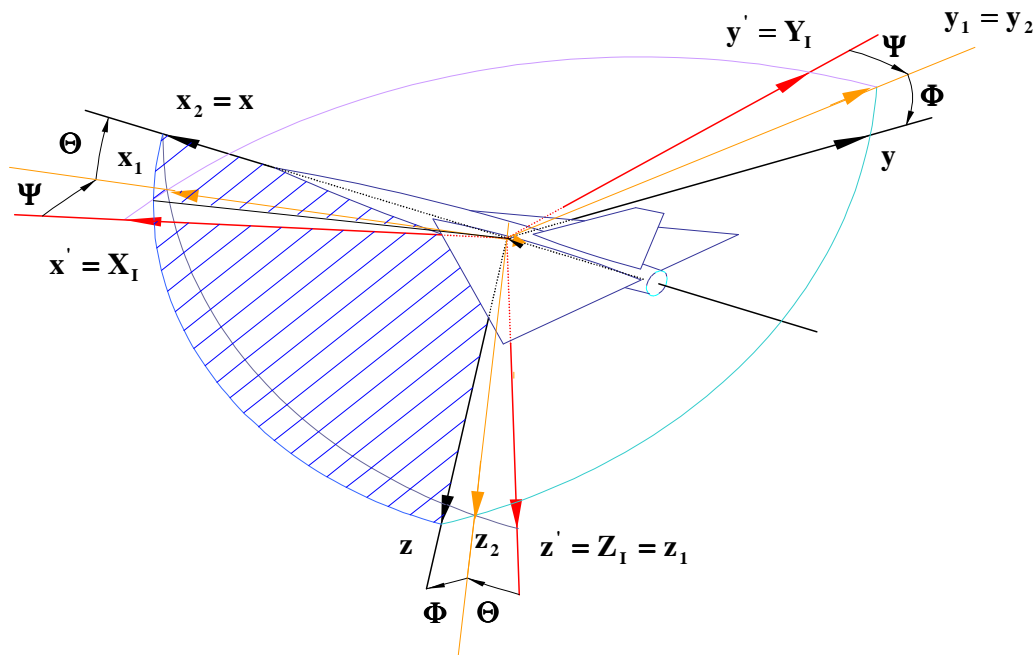


Sl.2.13-a.

Table 1-1

Ose		S	Momenti oko ose			Uglovi		Brzine	
Oznaka	Simbol		Oznaka	Simb	Pozitiv. smer	Oznaka	Simb	Translatorska	Ugaona
Uzdužna	X	X	Valjanje	L	Y→Z	Valjanje	ϕ	u	p
Bočna	Y	Y	Propinjanje	M	Z→X	Propinjanje	θ	v	q
Normal	Z	Z	Skretanje	N	X→Y	Skretanje	ψ	w	r

Tablica 2.4. Standardne konvencije i simboli



Sl.2.18 Vezani i Inercijalni koordinatni sistem

Jednostavniji način određivanja matrice transformacije iz Inercijalnog u Vezani sistem je uvođenjem kvaterniona (Prilog ...). Tri rotacije projektila za vrednosti Euler-ovih uglova zamenjuju se jednom rotacijom oko odgovarajuće ose koju definišu kvaternioni:

$$T_I^m = \begin{bmatrix} e_3^2 + e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 & 2(e_0e_1 - e_2e_3) & 2(e_0e_2 + e_1e_3) \\ 2(e_0e_1 + e_2e_3) & e_3^2 + e_1^2 - e_0^2 - e_2^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) \\ 2(e_0e_2 - e_1e_3) & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & e_3^2 + e_2^2 - e_0^2 - e_1^2 \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = T_m^I \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

$$T_m^I = (T_I^m)^T$$

Ovakav način prezentacije ima prednost jer omogućava da se izbegnu nedefinisane vrednosti izvoda Euler-ovih uglova u kinematskim jednačinama rotacije (1.5.3).

1.4.6. Geocentrični u Vezani

Matrica transformacije iz Geocentričnog u Vezani sistem je definisana na osnovu predhodnih matrica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}_G^m \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

$$\mathbf{T}_G^m = \mathbf{T}_I^m (\mathbf{T}_G^I)$$

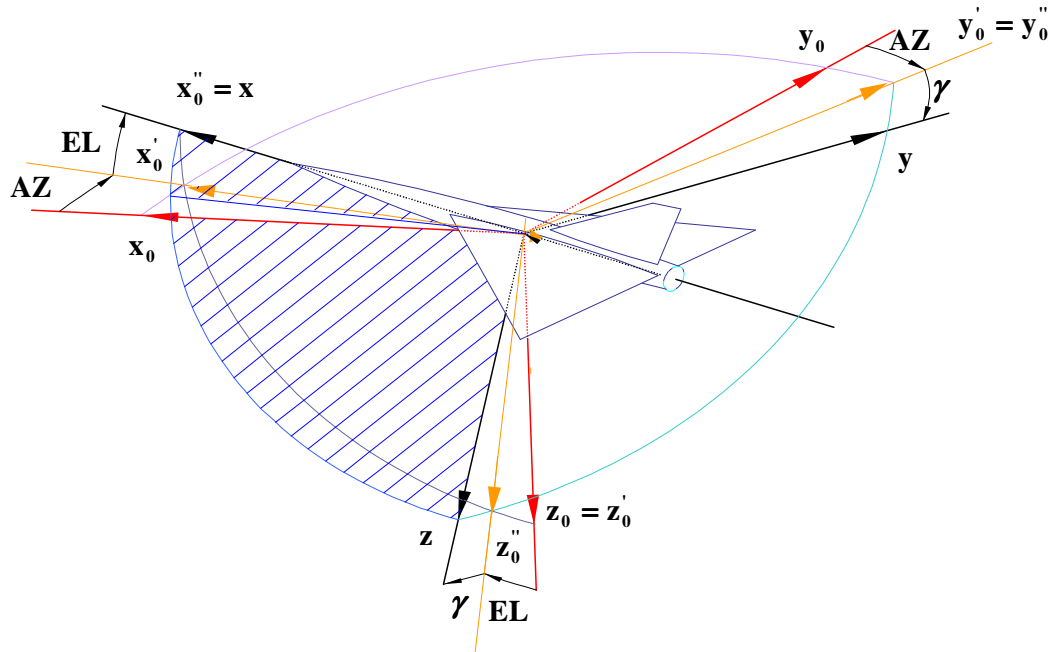
$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = \mathbf{T}_m^G \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

$$\mathbf{T}_m^G = (\mathbf{T}_G^m)^T$$

1.4.7. Normalni u Vezani

Matrica transformacije iz Normalnog vezanog za Zemlju koordinatnog sistema u Vezani za projektil data je preko azimuta, elevacije i ugla valjanja oko y_0 -ose:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_0^m \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1-26)$$



SL.2.19 Normalni vezan za Zemlju i Vezani za projektil koordinatni sistem

$$T_0^m = \begin{bmatrix} \cos AZ \cos EL & \sin AZ \cos EL & -\sin EL \\ -\sin AZ \cos \gamma + \cos AZ \sin EL \sin \gamma & \cos AZ \cos \gamma + \sin AZ \sin EL \sin \gamma & \cos EL \sin \gamma \\ \sin AZ \sin \gamma + \cos AZ \sin EL \cos \gamma & -\cos AZ \sin \gamma + \sin AZ \sin EL \cos \gamma & \cos EL \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = T_m^0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

$$T_m^0 = (T_0^m)^T$$

1.4.8. Geocentrični u Vezani

Matrica transformacije iz Geocentričnog u Vezani za projektil koordinatni sistem određena je uglovim geografskim koordinatama, azimutom, elevacijom i uglom valjanja:

$$T_G^m = T_0^m T_G^0 \quad (1-29)$$

$$T_G^m = \begin{bmatrix} -\cos AZ \cos EL \cos \alpha_G \sin \delta_G - \sin AZ \cos EL & -\cos AZ \cos EL \sin \alpha_G \sin \delta_G + \sin AZ \cos EL & \cos AZ \cos EL \cos \delta_G + \sin EL \cos \delta_G \\ \sin \alpha_G + \sin EL \cos \alpha_G \cos \delta_G & \cos \alpha_G + \sin EL \sin \alpha_G \cos \delta_G & \\ \\ -(-\sin AZ \cos \gamma + \cos AZ \sin EL \sin \gamma) \cos \alpha_G & -(-\sin AZ \cos \gamma + \cos AZ \sin EL \sin \gamma) \sin \alpha_G & (-\sin AZ \cos \gamma + \cos AZ \sin EL \sin \gamma) \\ \sin \delta_G - (\cos AZ \cos \gamma + \sin AZ \sin EL \sin \gamma) & \sin \delta_G + (\cos AZ \cos \gamma + \sin AZ \sin EL \sin \gamma) & \cos \delta_G - \cos EL \sin \gamma \sin \delta_G \\ \sin \alpha_G - \cos EL \sin \gamma \cos \alpha_G \cos \delta_G & \cos \alpha_G - \cos EL \sin \gamma \sin \alpha_G \cos \delta_G & \\ \\ -(\sin AZ \sin \gamma + \cos AZ \sin EL \cos \gamma) \cos \alpha_G & -(\sin AZ \sin \gamma + \cos AZ \sin EL \cos \gamma) \sin \alpha_G & (\sin AZ \sin \gamma + \cos AZ \sin EL \cos \gamma) \\ \sin \delta_G - (-\cos AZ \sin \gamma + \sin AZ \sin EL \cos \gamma) & \sin \delta_G + (-\cos AZ \sin \gamma + \sin AZ \sin EL \cos \gamma) & \cos \delta_G - \cos EL \cos \gamma \sin \delta_G \\ \sin \alpha_G - \cos EL \cos \gamma \cos \alpha_G \cos \delta_G & \cos \alpha_G - \cos EL \cos \gamma \sin \alpha_G \cos \delta_G & \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

1.4.9. Transformacione matrice inercijalne platforme

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Žiroskopski sistem je definisana na osnovu kvaterniona žiroskopske platforme:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{T}_p^m \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

$$\mathbf{T}_p^m = \begin{bmatrix} g_0^2 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 & 2(g_1 g_2 + g_0 g_3) & 2(g_1 g_3 - g_0 g_2) \\ 2(g_1 g_2 - g_0 g_3) & g_0^2 + g_2^2 - g_1^2 - g_3^2 & 2(g_2 g_3 + g_0 g_1) \\ 2(g_1 g_3 + g_0 g_2) & 2(g_2 g_3 - g_0 g_1) & g_0^2 + g_3^2 - g_1^2 - g_2^2 \end{bmatrix}$$

U slučaju fiksne, idealne žiroskopske platforme, vrednosti žiroskopskih kvaterniona je konstantna. U slučaju upravljanja promenom položaja rama platforme međutim, ove vrednosti će naravno biti promenljive, kao i u slučaju realne platforme (zbog drifta).

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = \mathbf{T}_m^p \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

$$\mathbf{T}_m^I = (\mathbf{T}_I^m)^T$$

Matrica transformacije iz Vezanog u Žiroskopski sistem je definisana na osnovu vrednosti prethodnih matrica:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_p^m &= \mathbf{T}_I^m \mathbf{T}_p^I \\ \mathbf{T}_m^p &= (\mathbf{T}_p^m)^T\end{aligned}\tag{1-33}$$

Euler-ovi uglovi projektila u odnosu na žiroskopsku platformu (uglovi greške) su definisani na osnovu žiroskopskih kvaterniona:

$$\begin{aligned}\Theta_p^m &= \sin^{-1}(-t_{p13}^m) \\ \Phi_p^m &= \tan^{-1}(t_{p23}^m / t_{p33}^m) \\ \Psi_p^m &= \tan^{-1}(t_{p12}^m / t_{p11}^m)\end{aligned}\tag{1-34}$$

gde su $t_{p_{ij}}^m$ koeficijenti u matrici transformacije iz Žiroskopskog u Vezani sistem:

$$\mathbf{T}_p^m = \begin{bmatrix} t_{p11}^m & t_{p12}^m & t_{p13}^m \\ t_{p21}^m & t_{p22}^m & t_{p23}^m \\ t_{p31}^m & t_{p32}^m & t_{p33}^m \end{bmatrix}\tag{1-35}$$

1.5. JEDNAČINE STANJA

1.5.1. Euler-ovi uglovi

Euler-ovi uglovi se izračunavaju na osnovu vrednosti matrice transformacije iz Inercijalnog u Vezani koordinatni sistem, odnosno vrednosti kvaterniona a prema jednačinama (1-22) i (1-25):

$$\begin{aligned}\Phi &= \arctan(t_{I23}^m / t_{I33}^m) = \arctan \left[\frac{2(e_2 e_3 + e_0 e_1)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2} \right] \\ \Theta &= \arcsin(-t_{I13}^m) = \arcsin[-2(e_1 e_3 - e_0 e_2)] \\ \Psi &= \arctan(t_{I12}^m / t_{I11}^m) = \arctan \left[\frac{2(e_1 e_2 + e_0 e_3)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2} \right]\end{aligned}\tag{1-36}$$

ili, obrnuto:

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \\
 e_1 &= \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \\
 e_2 &= \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \\
 e_3 &= \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2}
 \end{aligned} \tag{1-37}$$

Geografski položaj (uglovne koordinate) se određuju direktno na osnovu položaja u Geocentričnom koordinatnom:

$$\begin{aligned}
 \alpha_G &= \arctg \frac{Y_G}{X_G}, & 0 \leq \alpha_G < 2\pi \\
 \delta_G &= \arctg \frac{Z_G}{\sqrt{X_G^2 + Y_G^2}}, & -\pi/2 \leq \delta_G \leq \pi/2 \leq \pi/2
 \end{aligned} \tag{1-38}$$

Uglovi azimuta, elevacije i valjanja mogu se odrediti iz koeficijenata u matrici transformacije iz Normalnog u Vezani koordinatni sistem:

$$\begin{aligned}
 AZ &= \arctan(t_{0\ 12}^m / t_{0\ 21}^m), & -\pi \leq AZ \leq \pi \\
 EL &= \arcsin(-t_{0\ 13}^m), & -\pi/2 \leq EL \leq \pi/2 \\
 \gamma &= \arctan(t_{0\ 23}^m / t_{0\ 33}^m), & -\pi \leq \gamma \leq \pi
 \end{aligned} \tag{1-39}$$

1.5.2. Brzine

Brzina izračunata integracijom jednačina kretanja je inercijalna (apsolutna) brzina, određena u Inercijalnom sistemu. Brzina relativna u odnosu na zemlju (u Geocentričnom sistemu) može se odrediti oduzimanjem periferne brzine rotacije Zemlje sledećim transformacijama :

$$\vec{V}_{R_G} = T_I^G \vec{V}_I - \vec{V}_{\Omega_G} \tag{1-40}$$

gde je vektor periferne brzine rotacije definisan jednačinom:

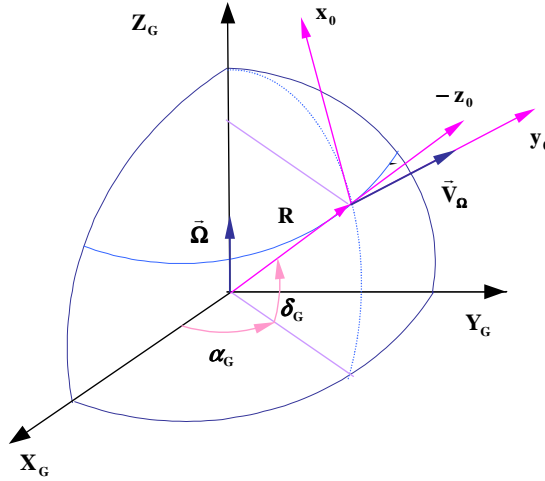
$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{\Omega_G} &= \begin{bmatrix} -V_{\Omega} \sin \alpha_g \\ V_{\Omega} \cos \alpha_g \\ 0 \end{bmatrix} \\
 V_{\Omega} &= \Omega R \cos \delta_g
 \end{aligned} \tag{1-41}$$

Vrednosti iste brzine u Normalnom sistemu su definisane transformacijom:

$$\vec{V}_{R_N} = T_I^N \vec{V}_I - \vec{V}_{\Omega_N} \tag{1-42}$$

gde je vektor periferne brzine rotacije definisan jednačinom:

$$\vec{V}_{\Omega_N} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{\Omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-43)$$



Sl.2.20 Vektor brzine rotacije Zemlje

Aerodinamička brzina (brzina relativna u odnosu na vazduh) je u slučaju mirne atmosfere (bez vetra identična relativnoj brzini u odnosu na Zemlju), dok je u slučaju atmosfere s vetrom definisana transformacijom:

$$\vec{V}_{A_G} = \vec{V}_{R_G} - \vec{V}_{W_G} \quad (1-44)$$

gde je vektor brzine vetra definisan jednačinom:

$$\vec{V}_{W_G} = \begin{bmatrix} -W_N \sin \delta_G \cos \alpha_G - W_E \sin \alpha_G \\ -W_E \sin \delta_G \sin \alpha_G + W_E \cos \alpha_G \\ W_E \cos \delta_G \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

Severna i istočna komponenta brzine vetra su definisane jednačinama:

$$\begin{aligned} W_N &= W \cos \alpha_W \\ W_E &= W \sin \alpha_W \end{aligned} \quad (1-46)$$

Aerodinamička brzina u Vezanom sistemu je data transformacijom:

$$\vec{V}_{R_M} = T_G^M \vec{V}_{A_G} \quad (1-47)$$

A napadni uglovi (ugao propinjanja i skretanja):

$$\begin{aligned}\beta &= \arcsin(V_{A_y} / V_A) \\ \alpha &= \arctan(V_{A_z} / V_{A_x})\end{aligned}\tag{1-48}$$

1.5.3. Ugaone brzine projektila

Ugaone brzine projekte su povezane sa izvodima Euler-ovih uglova sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\dot{\Psi} \sin \Theta + \dot{\Phi} \\ \omega_y &= \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \cos \Phi \\ \omega_z &= \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi\end{aligned}\tag{1-49}$$

Zbog neortogonalnosti, vrednosti izvoda Euler-ovih uglova brzina dobijamo iz prethodnih jednačina:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= (\omega_y \sin \Phi + \omega_z \cos \Phi) \frac{1}{\cos \Theta} \\ \dot{\Theta} &= -\omega_z \sin \Phi + \omega_y \cos \Phi \\ \dot{\Phi} &= \omega_x + (\omega_y \sin \Phi + \omega_z \cos \Phi) \tan \Theta\end{aligned}\tag{1-50}$$

Euler-ove ugaone brzine ne možemo pomoću ovih jednačina definisati za svaku vrednost ugla propinjanja i sistem postaje neodređen. Zato se i daje prednost proračunu ugaonog položaja preko kvaterniona.

1.5.4. Početne vrednosti matrica transformacije

Početne vrednosti veličina stanja i matrica transformacije se vezuju za proizvoljni početni trenutak. Obično je to trenutak lansiranja projektila (trenutak napuštanja usta cevi kod klasičnih, odnosno trenutak starta raketnog motora kod raketnih projektila).

Početne vrednosti Inercijalnih koordinata su dati sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}X_I &= R \cos \alpha_{G_0} \cos \delta_{G_0} \\ Y_I &= R \sin \alpha_{G_0} \cos \delta_{G_0} \\ Z_I &= R \sin \delta_{G_0} \\ R &= R_E + H_0\end{aligned}\tag{1-51}$$

Početna vrednost matrice transformacije iz Vezanog u normalni koordinatni sistem je određena početnim azimutom, elevacijom i uglom valjanja oko ose \mathbf{y}_0 :

$$(T_0^m)_0 = \begin{bmatrix} \cos EL \cos AZ & \cos EL \sin AZ & -\sin EL \\ -\sin AZ \cos \gamma + \sin EL \cos AZ \sin \gamma & \cos AZ \cos \gamma + \sin EL \sin AZ \sin \gamma & \cos EL \sin \gamma \\ \sin AZ \sin \gamma + \sin EL \cos AZ \cos \gamma & -\cos AZ \sin \gamma + \sin EL \sin AZ \cos \gamma & \cos EL \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1-52)$$

Početna vrednost matrice transformacije iz Inercijalnog u Vezani koordinatni sistem se jednostavnom transformacijom (imajući u vidu da su Inercijalni i Geocentrični sistem u početnom trenutku koincidentni):

$$(\mathbf{T}_I^m)_0 = (\mathbf{T}_0^m)_0 (\mathbf{T}_I^0)_0 = (\mathbf{T}_0^m)_0 (\mathbf{T}_I^0)_0 \quad (1-53)$$

Imajući u vidu da je na osnovu definicije Euler-ovih uglova:

$$T_I^m = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Psi \cos \Theta & -\sin \Theta \\ -\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi & -\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (1-54)$$

$$\mathbf{T}_I^m = \begin{bmatrix} t_{I\ 11}^m & t_{I\ 12}^m & t_{I\ 13}^m \\ t_{I\ 21}^m & t_{I\ 22}^m & t_{I\ 23}^m \\ t_{I\ 31}^m & t_{I\ 32}^m & t_{I\ 33}^m \end{bmatrix} \quad (1-55)$$

Iz ove matrične jednačine, možemo da odredimo sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \Theta &= \sin^{-1}(-t_{I\ 13}^m) \\ \Phi &= \tan^{-1}(t_{I\ 23}^m / t_{I\ 33}^m) \\ \Psi &= \tan^{-1}(t_{I\ 12}^m / t_{I\ 11}^m) \end{aligned} \quad (1-56)$$

Početne vrednosti kvaterniona su definisane definicionim jednačinama kvaterniona:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \\ q_1 &= \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_2 &= \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \\ q_3 &= \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Phi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \end{aligned} \quad (1-57)$$

Pretpostavljajući da su u početnom trenutku ose inercijalne platforme koincidentne sa sopstvenim osama projektila, početna vrednost matrice transformacije iz Inercijalnog u Žiroskopski koordinatni sistem je definisana kao:

$$\mathbf{T}_I^p = \mathbf{T}_I^m \quad (1-58)$$